

## Optimização de Carteiras de Investimento com recurso à Teoria das Matrizes Aleatórias

### Sumário:

As carteiras – ou portfolios - de investimento são “cabazes” de activos financeiros construídos com o objectivo de diminuir a exposição ao risco obtendo-se um perfil de risco versus retorno esperado impossível de obter com um único activo. O estudo do comportamento destes portfolios envolve a determinação de correlações entre activos, sendo que estas – ao contrário do que classicamente tem sido assumido – não têm um comportamento estável. Propõe-se uma metodologia para identificação de quais os elementos mais robustos no espaço das correlações e, com isto, obter um melhor proxy do comportamento futuro do portfolio.

### Descrição:

Os produtos derivados são instrumentos financeiros cujo valor depende de outras variáveis subjacentes, tais como acções, taxas de juros, e matérias-primas. A valoração depende, por isso, do modelo adoptado para o processo seguido pelos activos subjacentes.

As decisões de investimento assentam na ponderação do risco versus ganho esperado. A construção de carteiras – ou portfolios – de activos (acções, por exemplo) é uma forma de diminuir a exposição ao risco, já que os componentes da carteira não estão perfeitamente correlacionados e, portanto, o comportamento colectivo da carteira difere da simples soma das partes. A teoria clássica de portfolios de Markowitz [1] assume que o processo estocástico subjacente assenta numa distribuição normal com ganhos e covariâncias conhecidas. Na prática, estes parâmetros tem que ser inferidos a partir de observações do mercado. Como o número de observações é necessariamente limitado, os parâmetros assim determinados têm uma margem de erro associada. Mesmo excluindo o problema (relevante) de estimarmos os ganhos e nos focarmos exclusivamente nas covariâncias, deparamos-nos com a seguinte dificuldade: a dimensão  $N$  de uma carteira típica de um banco de investimento é,

tipicamente, demasiado grande quando comparada com a dimensão das séries temporais disponíveis para os activos da carteira. Seja  $N$  o número de activos e  $T$  a dimensão da série temporal, o número de dados que dispomos é  $N \times T$ , enquanto que o número de dados necessários para a matriz de covariância é  $\mathcal{O}(N^2)$ , é expectável que a qualidade das estimativas dependa essencialmente do rácio  $N/T$  e que o erro tenda para zero apenas no limite em que  $N/T \rightarrow 0$ . Na prática este limite nunca se verifica, podendo, na realidade, ser superior a 1, limite a partir do qual a matriz de covariância se torna singular e o problema da selecção da carteira perde o significado. Esta situação sublinha a necessidade de serem identificadas técnicas que permitam melhorar a “relação sinal/ruído” que conseguimos extrair de um conjunto de dados limitado.

Recentemente a abordagem estatística para caracterização de mercados financeiros tem atraído bastante atenção [2]. Assumindo a validade de um modelo estocástico, algumas propriedades estatísticas podem daí ser inferidas. Por exemplo, a matriz de correlação entre os  $N$  activos da nossa carteira pode ser visto como uma matriz aleatória, legitimando a expectativa de que possa herdar as propriedades previstas pela Teoria das Matrizes Aleatórias (RMT – *Random Matrix Theory*) caso  $N$  seja “suficientemente grande”. Estas propriedades têm sido confirmadas por diversos estudos (e.g. [3], [4], [5]). O espectro de valores próprios das matrizes de correlação têm mostrado seguir o verificado numa matriz de Wishart que é uma matriz de correlação construída a partir de séries não-correlacionadas ([6], [7]). Esses mesmos estudos demonstraram que existem desvios face a uma matriz de Wishart para ~ 2% dos maiores valores próprios. Os vectores próprios que lhes estão associados são estáveis ao longo do tempo constituindo a estrutura da matriz de correlação – ou seja – exprime as correlações mais robustas e menos voláteis [8]. Os mesmos autores identificaram ainda que:

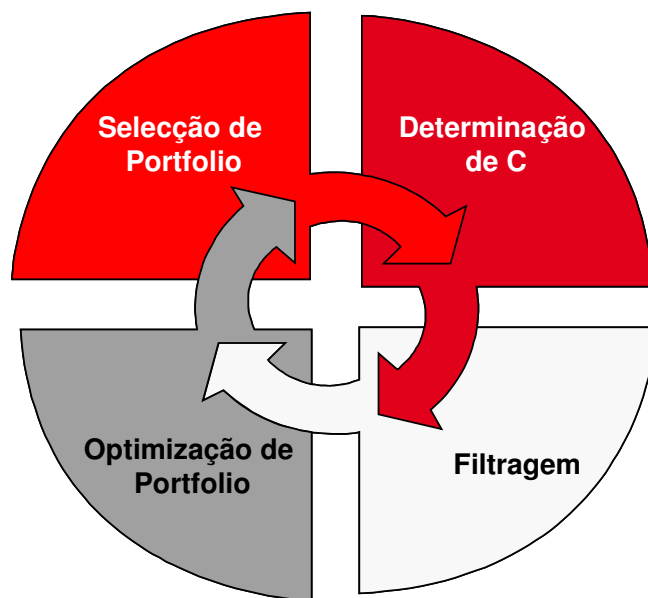
- Nos maiores vectores próprios a presença de activos que estão agrupados por sectores de actividade;
- A fronteira eficiente (portfolio óptimo no espaço dos ganhos versus risco) que se obtém da matriz

de correlação resultante filtragem da matriz empírica segundo os maiores vectores próprios, tem um poder predictivo (confirmado através de *back testing*) largamente superior ao que resulta utilização da matriz de correlação empírica, isto é, não filtrada.

Estas constatações reforçam assim a percepção da relevância dos maiores valores próprios (e respectivos valores próprios) enquanto elementos estruturais do portfolio.

Pretende-se implementar esta abordagem num sistema de gestão de portfolios que permita a selecção e optimização de carteiras com recurso à abordagem acima descrita.

**Objectivo:**



O objectivo do programa de trabalhos é a entrega de rotinas, desenvolvidas em C++, para a valorização de derivados de acções que seguem processos estocásticos com volatilidade estocástica.

O motor do sistema de gestão portfolios que conceptualizamos e pretendemos implementar, é constituído por 4 etapas esquematizadas na figura anexa.

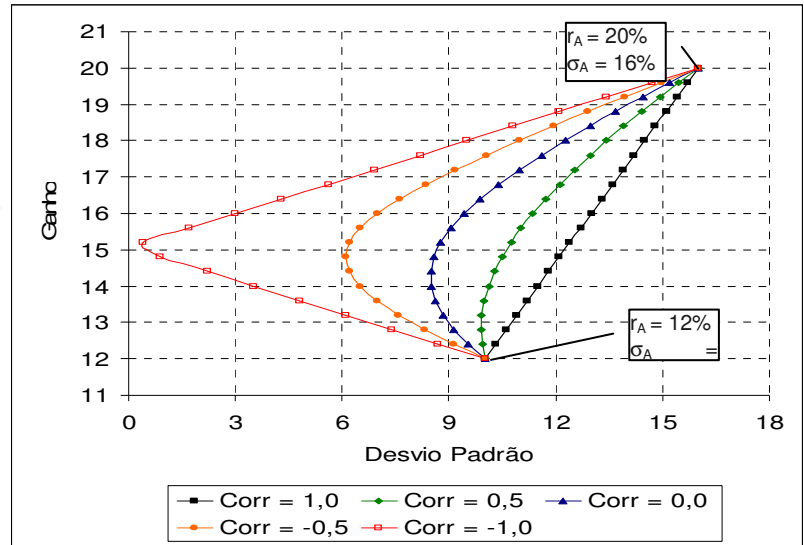
- a) A **selecção do portfolio** consiste na escolha dos activos que o compõem. Este passo não será sujeito a automatismos cabendo ao gestor da carteira identificar os seus componentes;
- b) A **determinação da matriz de correlação** empírica implica o carregamento das séries temporais de cada um dos activos seleccionados, sendo que estas poderão já estar disponíveis num datawarehouse da aplicação ou terem que ser obtidas através de um *provider* exterior. Uma vez na posse das séries temporais, é necessário proceder ao cálculo das variâncias e ganhos de cada

um dos activos e, posteriormente, de cada um dos elementos da matriz de correlação;

- c) A **filtragem** da matriz de correlação implica a geração de um matriz de wishart assumindo um número de activos e duração das respectivas séries temporais idênticos ao do portfolio anteriormente construído. A distribuição de densidade de valores próprios terá que ser efectuada quer para a matriz empírica quer para a matriz de wishart, sendo a partir da sobreposição de ambas que serão identificados os valores próprios da matriz empírica que se sobrepõem ao fundo de ruído correspondente à matriz de wishart. A mudança de base da matriz composta pelos vectores próprios que lhes estão associados para a base da matriz de correlação empírica permite obter uma matriz de correlação filtrada. Uma vez que a informação significativa da matriz de correlação  $C$  está contida nos vectores próprios “desviados” – aqueles que estão para além do limite definido pela teoria das matrizes aleatórias, devemos construir uma matriz de correlação filtrada  $C'$  retendo apenas esses vectores próprios. Para esse fim, devemos construir uma matriz diagonal  $\Lambda'$ , com os elementos  $\Lambda'_{ii} = \{0, \dots, 0, \lambda_{1+}, \lambda_{2+}, \dots, \lambda_{n+}\}$ , em  $\lambda_{1+}$  a  $\lambda_{n+}$  são os vectores próprios “desviados”. Posteriormente transformamos  $\Lambda'$  para a base de  $C$ , obtendo-se assim a matriz de correlação filtrada  $C'$ . Adicionalmente os elementos da diagonal principal são feitos  $C'_{ii} = 1$  de modo a manter  $\text{Tr}(C) = \text{Tr}(C')$ .
- d) A **optimização do portfolio** é um processo que consiste em afinar a constituição da carteira (em termos do peso dos activos que a constituem) de modo que esta se situe sobre a fronteira eficiente. Abaixo consideramos o exemplo mais simples de um portfolio: apenas dois activos. Vemos que o comportamento colectivo desenha uma linha no espaço dos ganhos esperados versus risco. Para mais do que dois activos teremos uma área e não uma linha, sendo o objectivo o de “puxar” a composição do portfolio para o limite superior dessa área – a fronteira eficiente.

Exemplo: Dois activos

Arbitrando as características de dois activos, e considerando diversos factores de correlação, obtemos a “curva eficiente”



O plano de trabalhos que propomos inclui os passos b), c) e d) do sistema acima descrito e consideramos adequado o envolvimento de dois estudantes:

Estudante 1: fase c), isto é, filtragem;

Estudante 2: fase b) e d), isto é, determinação da matriz de correlação e optimização do portefólio.

Estes desenvolvimentos serão integrados num sistema mais vasto desenvolvido por uma equipa da Closer.

#### Plano:

O tempo requerido para a conclusão deste trabalho é estimado em cerca de seis meses. Um plano de trabalhos preliminar inclui:

0.5 mês - introdução à teoria de portefólios;

1 mês - introdução às tecnologias requeridas para o desenvolvimento dos trabalhos (e.g., C++, SAS, SQL Server);

3 meses – desenvolvimento de código;

1 mês - teste do código;

0.5 mês - integração do código num sistema de gestão de portefólios.

#### Referências:

- [1] H. Markowitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, J. Wiley and Sons, New York(1959).

- [2] Ver e.g., R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press(2000); J. P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risk*, Cambridge University Press(2000)
- [3] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1467, (1999).
- [4] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1471, (1999).
- [5] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, T. Guhr, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* 65, 066126 (2002).
- [6] T. H. Baker, P. J. Forrester and P. A. Pearce, *J.Phys. A. Math.Gen.* 31, 6087(1998).
- [7] A. Edelman, *SIAM. J.Matrix.Anal.Appl.* 9, 543(1998).
- [8] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, T. Guhr, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* 65, 066126 (2002).